ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG TÀI TUỆ

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA GIÁC VÀ ĐA DIỆN ĐỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG TÀI TUỆ

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA GIÁC VÀ ĐA DIỆN ĐỀU

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Hình học (geometry) bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp cổ geo- "đất", -metron "đo đạc", nghĩa là đo đạc đất đai. Cùng với Số học, Hình học là một trong hai ngành toán học được con người nghiên cứu từ thời cổ đại.

Hình học cổ điển (Hình học Euclid) tập trung vào xây dựng các hình dựa trên compas và thước kẻ. Euclid đã cách mạng hóa hình học bằng cách giới thiệu phương pháp chứng minh toán học và các tiên đề mà ngày nay vẫn còn sử dụng. Cuốn sách của ông "Cơ sở hình học" (The elements) được coi là sách giáo khoa có ảnh hưởng nhất mọi thời đại.

Trong thời hiện đại, khái niệm hình học đã được khái quát hóa đến một mức độ trừu tượng cao và phức tạp. Hình học trở thành đối tượng của các phương pháp Giải tích và Đại số trừu tượng. Nhiều ngành hiện đại của hình học khác biệt với hình học cổ điển ra đời như Hình học đại số và Hình học giải tích.

Trong Hình học cổ điển, đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc ở đỉnh bằng nhau. Đa giác đều được chia làm hai loại là đa giác lồi đều và đa giác sao đều. Luận văn tìm hiểu về đa giác lồi đều, gọi tắt là đa giác đều. Đa giác đều được nghiên cứu chi tiết ở phổ thông. Chúng không chỉ xuất hiện trong toán học mà còn xuất hiện trong tự nhiên, trong các tác phẩm nghệ thuật, công trình kiến trúc,... mà con người tạo ra. Mục đích chính thứ nhất của luận văn là tìm hiểu những tính chất cơ bản của đa giác đều và một số đa giác đều đặc biệt. Ở phổ thông ta đã làm quen với tam giác đều và hình vuông. Mặc dù còn nhiều điều thú vị, chẳng hạn xem tài liệu "Mysteries of the equilateral triangle" của Brian J. McCartin cho tam giác đều, nhưng do khuôn khổ luận văn chỉ tìm hiểu một loại đa giác đều mới là ngũ giác đều. Nội dung của mục đích thứ nhất này tổng hợp từ nhiều nguồn tài liệu trong đó chủ yếu theo ba tài liệu đó là bài báo "A Study of the regular pentagon with a classic geometric approach" của A. C. Sparavigna và M. M. Baldi; báo cáo môn học "A Constructibility for a regular polygons" của Eric T.Eekhoff. Chú ý bài báo cuối tìm hiểu về dựng đa giác đều 17 cạnh nội tiếp đường tròn được nghiên cứu bởi Carl Friedrich Gauss. Năm 1796, nhà toán học Carl Friedrich Gauss đã tìm được cách vẽ đa giác đều có 17 cạnh bằng thước thẳng và compas, bằng cách xem các đỉnh của đa giác trên vòng tròn như là nghiệm của phương trình số phức $z^{17} - 1 = 0$. Năm năm sau, ông đã khám phá lý thuyết mà sau này được gọi là "Chu kỳ Gauss" (Gaussian periods) viết trong sách Disquisitiones Arithmeticae (Khảo cứu Số học). Lý thuyết này giúp ông tìm được điều kiện đủ để một đa giác đều có thể vẽ được bằng thước kẻ và compas. Điều kiện đó như sau "Một đa giá đều có n cạnh có thể vẽ được chỉ bằng thước kẻ và compas khi n bằng tích số của một luỹ thừa của 2 với một số bất kỳ các số Fermat nguyên tố khác nhau". Gauss cũng cho là điều kiện đó cũng là điều kiện cần nhưng không chứng minh. Đến năm 1837, Pierre Wantzel chứng minh được điều kiện của Gauss.

Mục đích chính thứ hai của luận văn tìm hiểu về các khối đa diện đều. một khối đa diện đều là một khối đa diện có tất cả các mặt là các đa giác đều bằng nhau và các cạnh bằng nhau. Đa diện đều được chia thành đa diện đều lồi và lõm. Luận văn tìm hiểu một số yếu tố cơ bản về các đa diện đều lồi gọi tắt là đa diện đều. Trong không gian ba chiều, có đúng 5 khối đa diện đều lồi còn gọi là các khối đa diện Platon là tứ diện đều (tetrahedron), hình lập phương (hexahedron), bát diện đều (octahedron), thập nhị diện đều (dodecahedron) và nhị thập diện đều (icosahedron). Chúng được tìm thấy tại nhiều vùng khác nhau ở Scotland và trở thành nền tảng kiến trúc trong thế giới cổ đại. Xuất hiện từ rất sớm nhưng cho tới thời điểm cách đây hơn 2500 năm thì các quy luật toán học xung quanh vấn đề các khối đa diện đều Platon mới lần đầu tiên được đề cập tới và nghiên cứu sâu rộng. Một điều khá thú vị là theo Platon thì 5 đa diện đều này còn là đại diện cho các yếu tố cơ bản trong vũ trụ: lửa (tứ diện đều), nước (hình lập phương), không khí (bát diện đều), trái đất (thập nhị diện đều) và vũ trụ (nhị thập diện đều). Tài liệu chính trình bày mục đích này là công trình "A geometric analysis of the platonic solids and other semi-regular polyhedra" của K.J.M. Maclean.

Luận văn được chia làm hai chương. Chương 1 trình bày một số vấn đề cơ bản về đa giác đều (một số tính chất cơ bản, dựng đa giác đều nội tiếp đường tròn bằng thước kẻ và compas), đa diện đều (một số tính chất cơ bản, Định lý Euler về mối liên hệ giữa số cạnh, số đỉnh, số mặt của đa diện và phân loại đa diện). Chương 2 trình bày một lớp đa giác đặc biệt ngũ giác đều (một số tính chất liên quan đến tỉ số vàng, các cách dựng ngũ giác), 5 khối Platon (thể tích, diện tích xung quang, một số khoảng cách, góc cơ bản).

Trong quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học khóa Cao học Toán khóa 11B (2017-2019) - trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 10 năm 2019

Tác giả

Đặng Tài Tuệ

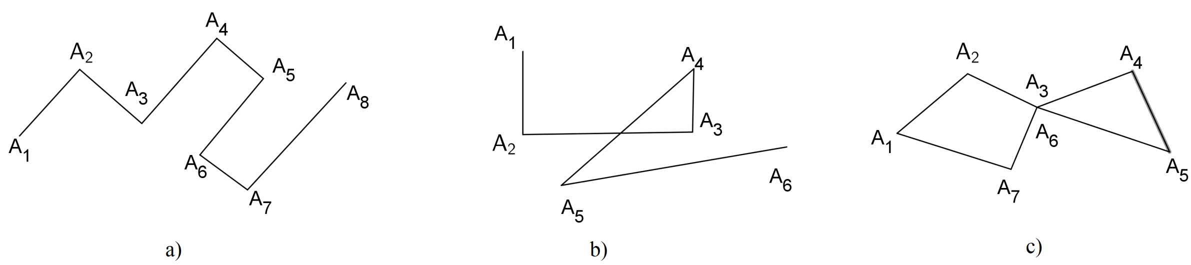
Chương 1

Đa giác đều và đa diện đều

1.1. Một số yếu tố và bài toán cơ bản trong đa giác đều

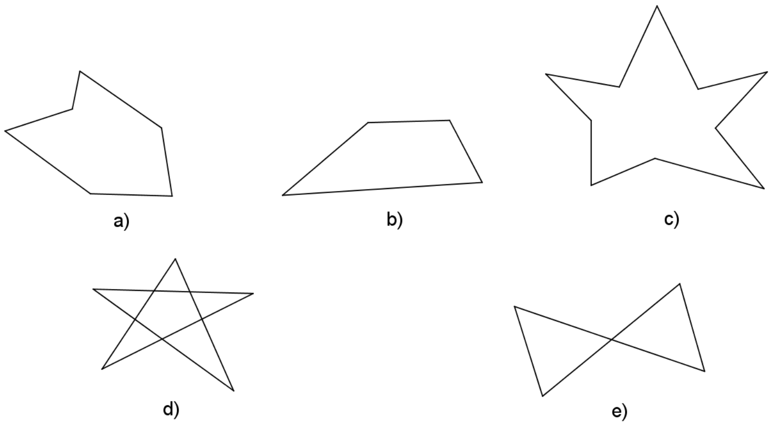
Định nghĩa 1.1.1 (Đường gấp khúc). *Đường gấp khúc n cạnh* là hình hợp thành bởi n đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n+1}$, trong đó hai đoạn thẳng liên tiếp $A_{i-1}A_i$ và A_iA_{i+1} không cùng nằm trên một đường thẳng (i=2,3,...,n). Đường gấp khúc như trên được kí hiệu là $A_1A_2...A_{n+1}$. Các điểm A_i gọi là các *đỉnh* của đường gấp khúc (có $n+1$ đỉnh), còn các đoạn thẳng A_iA_{i+1} gọi là các *cạnh* của đường gấp khúc.

Từ định nghĩa trên ta suy ra hai cạnh liên tiếp $A_{i-1}A_i$ và A_iA_{i+1} chỉ có điểm chung duy nhất là đỉnh A_i.



Hình 1.1: Các đường gấp khúc

Định nghĩa 1.1.2 (Đa giác). *Đa giác n cạnh* là đường gấp khúc n cạnh ($n \geq 3$) $A_1A_2...A_{n+1}$ sao cho đỉnh đầu A_1 và đỉnh cuối A_{n+1} trùng nhau, cạnh đầu A_1A_2 và cạnh cuối A_nA_{n+1} (cũng coi là hai cạnh liên tiếp) không nằm trên một đường thẳng. Đa giác như thế kí hiệu là $A_1A_2...A_n$. Đa giác n cạnh còn gọi là n-giác. Các điểm A_i gọi là các *đỉnh* của đa giác, các đoạn thẳng A_iA_{i+1} gọi là các *cạnh* của đa giác. Góc $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ gọi là *góc đa giác ở đỉnh A_i*(Hình 1.1b).



Hình 1.2: Các đa giác

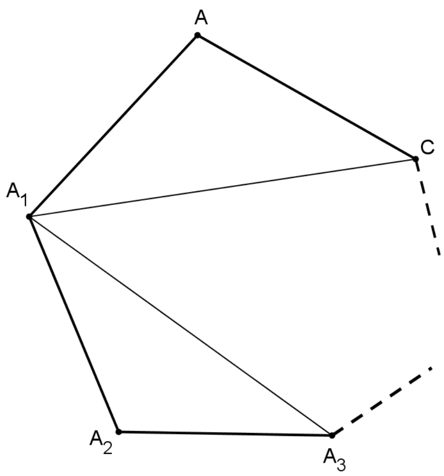
Định nghĩa 1.1.3 (Đa giác lồi)**.** *Đa giác lồi* là đa giác mà nó nằm về một phía đối với đường thẳng chứa bất kì một cạnh nào của đa giác đó. Ở Hình 1.2b) là đa giác lồi, các đa giác còn lại đều không phải là đa giác lồi.

Nội dung của luận văn này ở phần đa giác tác giả chỉ trình bày về các nội dung xoay quanh đa giác lồi.

Định nghĩa 1.1.4 (Đường chéo của đa giác lồi)**.** *Đường chéo của đa giác lồi* là đường thẳng nối 2 đỉnh không liên tiếp.

Mệnh đề 1.1.5. *Số đường chéo trong đa giác n-cạnh là* $\dfrac{n(n+3)}{2}$.

Mệnh đề 1.1.6. *Tổng các góc trong của đa giác n-cạnh là* $(n-2)180^o$.



Hình 1.3:

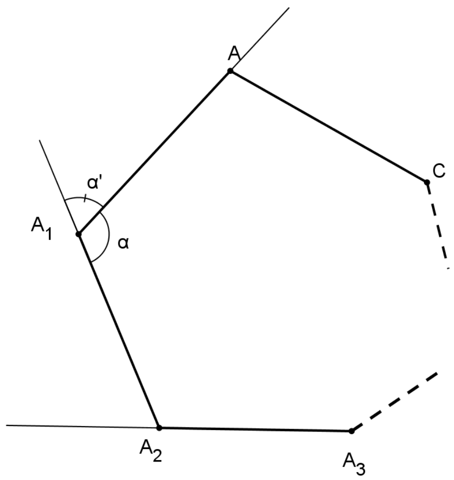
Chứng minh. Chia đa giác n cạnh thành những tam giác như Hình 1.3. Có $n-2$ tam giác, lại có tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^o. Suy ra tổng các góc của đa giác n cạnh là $(n-2)180^o$. □

Hệ quả 1.1.7. *Tổng số đo các góc ngoài của một đa giác (mỗi đỉnh chỉ xét 1 góc ngoài) là* 360^o.

Chứng minh. Giả sử đa giác có n-cạnh. Khi đó có n góc trong và n góc ngoài. Tại mỗi đỉnh có 1 góc trong và 1 góc ngoài nằm ở vị trí kề bù với nhau ($\alpha + \alpha' = 180^o$). Tổng số đo các cặp góc là $n180^o$, mà ta có tổng số đo góc trong của đa giác n-cạnh là $(n-2)180^o$ theo Mệnh đề 1.1.6. Vậy tổng số đo góc ngoài của đa giác n-cạnh là

$$n180^o - (n-2)180^o = 360^o.$$

□



Hình 1.4:

Số cạnh	**Tên gọi**	**Tên bằng tiếng Anh**
3	Tam giác đều	Equilateral triangle
4	Hình vuông	Square
5	Ngũ giác đều	Pentagon
6	Lục giác đều	Hexagon
7	Thất giác đều	Heptagon
8	Bát giác đều	Octagon
9	Cửu giác đều	Nonagon
10	Thập giác đều	Decagon

Bảng 1.1: Bảng tên gọi các đa giác đều

Định nghĩa 1.1.8 (Đa giác đều). *Đa giác đều* là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc ở đỉnh bằng nhau. Đa giác đều được chia làm hai loại là: đa giác lồi đều và đa giác sao đều.

Ở nội dung luận văn này tác giả chỉ trình bày về đa giác lồi đều và gọi tắt đa giác lồi đều là đa giác đều.

Chú ý 1.1.9 (Nhóm đối xứng)**.** Cho H là tập các điểm của một hình nào đó. Một phép thế s của H được gọi là một *phép đẳng cự* nếu với mọi $M, N \in H$, khoảng cách giữa hai điểm M, N bằng khoảng cách giữa hai điểm $s(M), s(N)$. Tập hợp các phép đẳng cự của hình H làm thành một nhóm với phép hợp thành các ánh xạ, và ta gọi nó là *nhóm các phép đẳng cự của* H. Giả sử H là tập các điểm nằm trên các cạnh một tam giác đều với các đỉnh là $1, 2, 3$. Khi đó độ dài của mỗi cạnh là lớn nhất trong các độ dài của các đoạn thẳng nối hai điểm tuỳ ý trên H. Vì thế mỗi phép đẳng cự của hình H đều biến các đỉnh thành các đỉnh. Theo tiêu chuẩn này, ta có thể kiểm tra được có đúng 6 phép đẳng cự của hình H, đó là 3 phép quay 120^0, 240^0, 360^0 với tâm quay là trọng tâm của tam giác đều và chiều quay ngược kim đồng hồ; và 3 phép đối xứng qua 3 đường cao. Nếu ta đồng nhất các phép quay 120^0, 240^0, 360^0 ở trên lần lượt với 3 phép thế (123), (132), (1); và đồng nhất 3 phép đối xứng qua 3 đường cao đi qua các đỉnh $1, 2, 3$ lần lượt với các phép thế (23), (13), (12) thì bảng toán nhân của nhóm các phép đẳng cự của H trùng với bảng toán nhân của nhóm các phép thế S_3. Nhóm trên cũng được gọi là nhóm nhị diện hay nhóm đối xứng của tam giác đều. Tổng quát nhóm đối xứng (nhóm nhị diện) của các đa giác đều n cạnh được gọi theo tên tiếng Anh là nhóm *dihedral group* D_n Nó bao gồm phép quay quanh tâm C_n (tâm đối xứng), cùng với n số trục đi qua tâm này. Nếu n là số chẵn thì một nửa số trục đối xứng đi qua hai đỉnh đối nhau của đa giác và nửa còn lại đi qua trung điểm của hai cạnh đối. Nếu n là lẻ thì tất cả các trục đối xứng đều đi qua một đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh ấy.

Mệnh đề 1.1.10. *Tồn tại đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác đều. Hơn nữa hai đường tròn này đồng tâm.*

Chứng minh. Gọi O là giao điểm của 2 đường phân giác trong $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCD}$. Vì $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ nên $\widehat{B_2} = \widehat{C_3}$. Kéo theo $\triangle OBC$ cân tại O và $OB = OC$. Ta có $\triangle OCB = \triangle OCD \quad (c - g - c)$ nên $OB = OD$. Suy ra $\widehat{D_5} = \widehat{C_4}$.